MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 2:

1. Promyslete a zkuste pečlivě sepsat řešení aspoň jednoho z následujících problémků z opakování:

   (i) Zopakujte si ještě princip důkazu matematickou indukcí a dokažte (užitím matematické indukce) následující tvrzení: Pro $n \in N, n \neq 3$ platí $2^n \geq n^2$.

   (ii) Ukažte, že platí (A, B, C jsou množiny): a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

   b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

2. Nebo můžete promyslet (a opět zkuste i „sepsat" řešení aspoň jednoho problémku):

   Je dáno zobrazení $f : A \to B$ a $M, M_i \subseteq A$, $N, N_i \subseteq B$, $(i = 1,2)$; označme

   $$f(M) = \{b \in B; \exists a \in M : f(a) = b\} \quad \text{a} \quad f^{-1}(N) = \{a \in A; f(a) \in N\}.$$

   Rozhodněte, zda platí následující tvrzení a pokud některé neplatí, pokuste se charakterizovat zobrazení, pro která tvrzení platí:

   a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$

   b) $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$

   c) $\forall M \subseteq A : f^{-1}(f(M)) = M$; $\forall N \subseteq B : f(f^{-1}(N)) = N$.

3. A dále promyslete a opět zkuste sepsat řešení aspoň jednoho z následujících příkladů:

   (i) Najděte v R (pokud existují) supremum, infimum, maximum, minimum následujících množin (a sepište důkaz aspoň jednoho z vašich tvrzení) :

   a) $M_1 = \left\{1 - \dfrac{1}{n^2}; n \in N\right\}$; b) $M_2 = \left\{\dfrac{n + (-1)^n}{n}; n \in N\right\}$; c) $M_3 = \left\{n^{(-1)^n}; n \in N\right\}$;

   d) $M_4 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N, n > m\right\}$; e)* $M_5 = \left\{q < \sqrt{3}; q \in Q\right\}$.

   (ii). Ukažte, že pro neprázdné množiny A, B reálných čísel platí: $(\forall a \in A\ \forall b \in B : a \leq b) \Rightarrow (\sup A \leq \inf B)$.

   (iii) Nechť podmnožiny A, B množiny reálných čísel jsou neprázdné a omezené. Co lze říci o supremu a infimu množin $A \cup B$ a $A \cap B$. „Vaše" tvrzení dokažte !